15/05/2017

Μάθημα 18ο

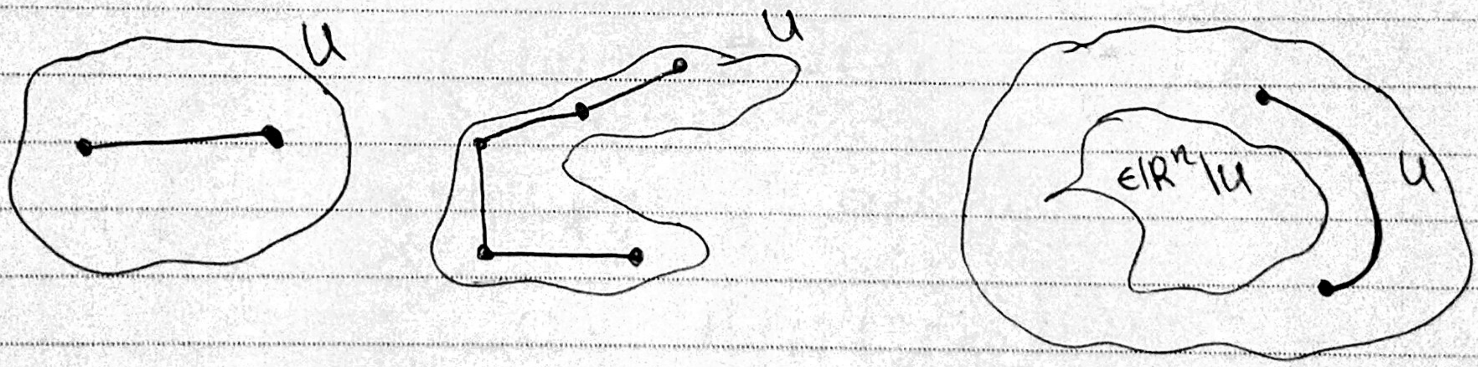
Απει4

[Υπενθύμιση: $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό πεδίο κλίσεων αν $\exists\ \varphi: U \to \mathbb{R}$ (το δυναμικό του $\bar{f}$) $\nabla\varphi = \bar{f}$]

αν έχει → μοναδικό

κλίση

Πρόταση: Έστω $U \subset \mathbb{R}$ ένα χωρίο ή τόπος (δηλ. ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και συνεκτικό, όπου συνεκτικό ονομάζεται στον $\mathbb{R}^n$ ένα U έτσι ώστε για κάθε δύο σημεία του υπάρχει καμπύλη που τα ενώνει η οποία βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο U $\Longleftrightarrow$ ... υπάρχει πολυγωνική γραμμή που τα ενώνει ολόκληρη μέσα στο U)



και $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$ ένα πεδίο κλίσεων, τότε το σύνολο των δυναμικών του $\bar{f}$ είναι το σύνολο:

$\{ \varphi + c \ : \ c \in \mathbb{R} \}$, όπου $\varphi: U \to \mathbb{R}$ ένα δυναμικό του $\bar{f}$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$): Έστω ότι $\nabla\varphi = \bar{f} \Rightarrow \nabla(\varphi + c) = \bar{f}$

δηλ. αν φ δυναμικό, τότε και $\varphi + c$ δυναμικό.

($\Leftarrow$): Έστω ότι $\psi: U \to \mathbb{R}$ ένα άλλο δυναμικό της $\bar{f}$.

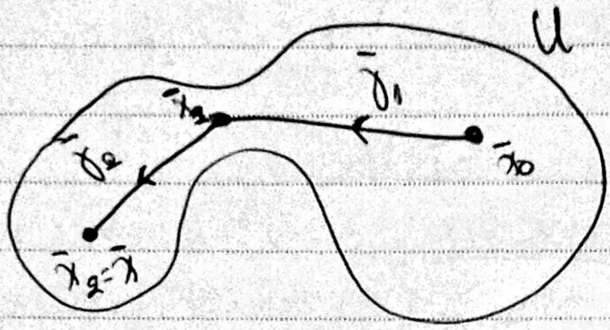
Τότε για την $g = \psi - \varphi$ θα ισχύει: $\nabla g = \nabla(\psi - \varphi) = \bar{0}$

(διάνυσμα)

Έστω $\bar{x}_0$, $\bar{x} \in U$ και $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_\kappa$ πολυγωνική γραμμή που συνδέει τα $\bar{x}_0$, και $\bar{x}$

(*) $\bar{\gamma}_i(t) = \bar{x}_{i-1} + t(\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}) \in U \quad \forall t \in [0,1]$

$i = 1, \dots, \kappa$, $\bar{x}_\kappa = \bar{x}$



Τότε ισχύει:

$$g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{\kappa} \left(g(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_{i-1}) \right) =$$

$$\overset{\text{από}(*)}{=} \sum_{i=1}^{\kappa} \Big(\underbrace{g(\bar{\gamma}_i(1))}_{(g \circ \bar{\gamma}_i)(1)} - \underbrace{g(\bar{\gamma}_i(0))}_{(g \circ \bar{\gamma}_i)(0)} \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} \int_0^1 \underbrace{(g \circ \bar{\gamma}_i)'(t)\,dt}_{(I)} = 0$$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

$(I) = \nabla g(\bar{\gamma}_i(t)) \cdot \bar{\gamma}_i'(t) = \bar{0}$

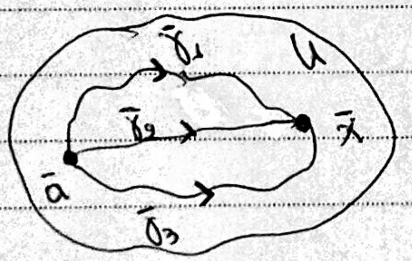
[αφού, είπαμε, $\nabla g = \nabla \psi - \nabla \varphi = \bar{f} - \bar{f} = \bar{0}$ σε όλο το U]

$\Longrightarrow \forall \bar{x}, \bar{x}_0 \in U : \; g(\bar{x}) = g(\bar{x}_0) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Αν σταθεροποιήσουμε ένα $\bar{x}_0$, έχουμε ότι το $g(\bar{x}) =$ σταθερό $\forall \bar{x} \in U$

<u>Άρα</u>: Για ανοικτά συνεκτικά $U \subset \mathbb{R}^n$ το δυναμικό ενός πεδίου κλίσεων $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$ είναι μοναδικό «μέχρι προσθετικής σταθεράς» (up to additive constant)

<u>Ορισμός</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$ ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο. Λέμε ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του $\bar{f}$ είναι ανεξάρτητα του δρόμου, αν για κάθε δύο σημεία $\bar{a}, \bar{x} \in U$, όλα τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του $\bar{f}$ κατά μήκος.



<u>Πρόταση</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ χωρίο, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$ συνεχές. Τότε: τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του $\bar{f}$ ανεξάρτητα του δρόμου $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του $\bar{f}$ είναι $= 0$ κατά μήκος κάθε <u>κλειστής</u> κατά τμήματα C^1 καμπύλης.

<u>Απόδειξη</u>

$(\Leftarrow)$: $$\int_{\bar{\gamma}_1} \bar{f} \cdot d\bar{x} + \underbrace{\int_{\bar{\gamma}_2} \bar{f} \cdot d\bar{x}}_{= -\int_{\bar{\gamma}_2} \bar{f} \cdot d\bar{x}} = 0$$

$(\Rightarrow)$: Έστω $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2$

$$\Rightarrow \int_{\bar{\gamma}} \bar{f}\, d\bar{x} = \int_{\bar{\gamma}_1} \bar{f}\, d\bar{x} + \int_{\bar{\gamma}_2} \bar{f}\, d\bar{x} = \overbrace{\int_{\bar{\gamma}_1} \bar{f}\cdot d\bar{x} - \int_{\bar{\gamma}_2^-} \bar{f}\cdot d\bar{x}}^{\text{ίσα}} = 0$$

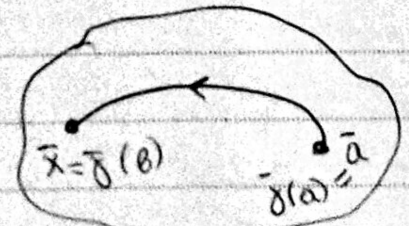
<u>Πρόταση (SUPER-DUPER-SOS)</u>

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ χωρίο και $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$ συνεχές. Τότε:
$\bar{f}$ πεδίο κλίσεων $\Leftrightarrow$ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα δρόμου.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα δυναμικό $\varphi: U \to \mathbb{R}$ του $\bar{f}$ έτσι ώστε για κάθε δύο σημεία $\bar{a}, \bar{x} \in U$ και κάθε κατά τμήματα C^1-καμπύλη:

$\bar{\gamma}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\gamma}([a,b]) \subset U$, $\bar{\gamma}(a) = \bar{a}$, $\bar{\gamma}(b) = \bar{x}$

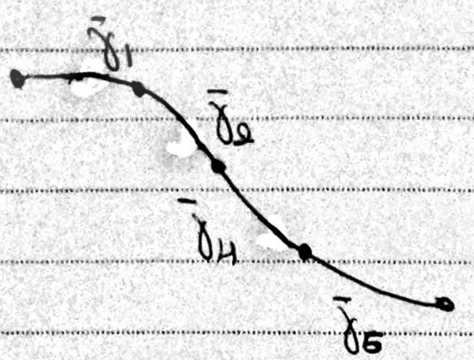
ισχύει: $$\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(\bar{y})\cdot d\bar{y} = \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{a}) \dots$$



<u>Απόδειξη:</u>

$(\Rightarrow)$: Έστω όλα τα δεδομένα όπως στην εκφώνηση και $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_k$ όπου $\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}\big|_{[t_{i-1}, t_i]}$ C^1

με $P = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \}$ μια κατάλληλη διαμέριση ώστε τα $\bar{\gamma}_i$ να είναι C^1



Τότε έχουμε: $\int_{\bar\gamma} \bar f(\bar y)\, d\bar y = \sum_{i=1}^{k} \int_{\bar\gamma_i} \nabla\varphi(\bar y)\cdot d\bar y \overset{\text{ορισμός}}{=}$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\nabla\varphi(\bar\gamma_i(t))\cdot \bar\gamma_i'(t)}_{\substack{\parallel \text{ κανόνας αλυσίδας} \\ (\varphi\circ\bar\gamma_i)'(t)}}\, dt \overset{\text{Θεμελιώδες Θεώρημα}}{=} \sum_{i=1}^{k}\Big(\underbrace{(\varphi\circ\bar\gamma_i)(t_i)}_{\substack{\parallel \\ (\varphi\circ\bar\gamma)(t_i)}} - \underbrace{(\varphi\circ\bar\gamma_i)(t_{i-1})}_{\substack{\parallel \\ (\varphi\circ\bar\gamma)(t_{i-1})}} \Big)$$

$$\Big[= (\varphi\circ\bar\gamma)(\overset{b}{\overset{\parallel}{t_k}}) - (\varphi\circ\bar\gamma)(\overset{a}{\overset{\parallel}{t_0}}) = \varphi(\bar\gamma(b)) - \varphi(\bar\gamma(a)) = \varphi(\bar x) - \varphi(\bar a) \Big]$$

($\Longleftarrow$): Έχουμε ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της $\bar f$ είναι ανεξάρτητα του δρόμου.

Θ.ν.δ.ο. $\exists\, \varphi: U \to \mathbb{R}$ με $\nabla\varphi(\bar x) = \bar f(\bar x)\ \forall \bar x \in U$

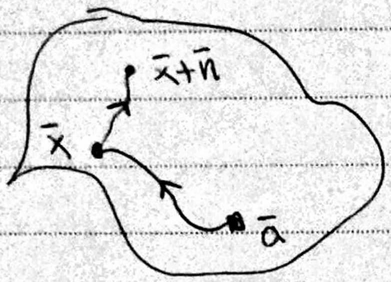
Απόδειξη: (κατασκευαστικά)

Έστω $\bar a \in U$. Ορίζουμε την $\varphi: U \to \mathbb{R}$ ως $\varphi(\bar x) := \int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar y\ \forall \bar x \in U$

όπου γ μια οποιαδήποτε καμπύλη από το $\bar a$ στο $\bar x$ (κ.τμ. C^1) (η φ είναι καλά ορισμένη).

Θ.ν.δ.ο. $\nabla\varphi(\bar x) = \bar f(\bar x) \iff \lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{\varphi(\bar x + \bar h) - \varphi(\bar x) - \bar f(\bar x)\cdot \bar h}{\|\bar h\|} = \bar 0\quad \forall \bar x \in U$

Έστω $\bar{x} \in U$. Τότε υπάρχει $\forall \bar{n} \neq 0$, επαρκώς κοντά στο $\bar{x}$, ένα ευθύγραμμο τμήμα $\subset U$ $\gamma_n(t) = \bar{x} + t\bar{n}$, $t \in [0,1]$



και έχουμε:

$$\varphi(\bar{x}+\bar{n}) = \int_{\bar{\gamma} \oplus \bar{\gamma}_n} \bar{f} \cdot d\bar{y} =$$

$$= \underbrace{\int_{\bar{\gamma}} \bar{f} \cdot d\bar{y}}_{= \varphi(\bar{x})} + \int_{\bar{\gamma}_n} \underbrace{\bar{f}(\bar{y})}_{= \bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x})} d\bar{y} =$$

$$= \varphi(\bar{x}) + \underbrace{\int_{\bar{\gamma}_n} \bar{f}(\bar{x}) \cdot dy}_{= \bar{f}(\bar{x}) \cdot \bar{n}} + \int_{\bar{\gamma}_n} \left(\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\right) \cdot d\bar{y} =$$

$$= \varphi(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x}) \cdot \bar{n} + \int_0^1 \left(\bar{f}(\bar{x}+t\bar{n}) - \bar{f}(\bar{x})\right) \cdot \bar{n} \, dt$$

$$|\ldots| \leq \|\bar{n}\| \max_{t \in [0,1]} \|\bar{f}(\bar{x}+t\bar{n}) - \bar{f}(\bar{x})\| \xrightarrow{n \to 0} 0$$